Θέμα: α) $V(x^3 - xy^2 + 2y^2)$
β) $V((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - r^2)$

17/04/2019
7η διάλεξη

Λύση

α) $f(x,y) = x^3 - xy^2 + 2y^2 \xrightarrow{\text{ομογ.}} F(x,y,z) = x^3 - xy^2 + 2y^2 z$

σημεία ∞ ($z=0$): $F(x,y,0) \Leftrightarrow x^3 - xy^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(x^2-y^2)=0 \\ z=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x=\pm y \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases}$

$\Downarrow$ $(0,1,0)$ $\qquad$ $\Downarrow$ $(1,1,0)$ $\qquad$ $(1,-1,0)$

Κάθε πολλαπλάσιο είναι σωστή απάντηση.

β) $f(x,y) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - r^2$

$\Downarrow$

$F(x,y,z) = (x - x_0 z)^2 + (y - y_0 z)^2 - r^2 z^2$

σημεία στο ∞ ($z=0$): $F(x,y,0) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm iy \Rightarrow \begin{cases} x = iy & (i,1,0) \\ x = -iy & (-i,1,0) \end{cases}$

Παρατήρηση: Κάθε κύκλος έχει αυτά τα δύο σημεία στο ∞.

* Εφαπτομένες *

Αναπτυγμα Taylor $f(x,y)$ με $x=\alpha+\lambda t$ και $y=\beta+\mu t$

Εστω $f \in \mathbb{C}[x,y]$ με $\deg f = n$.

$$f(\alpha+\lambda t, \beta+\mu t) = f(\alpha,\beta) + \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta) + \mu \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)\right) t$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha,\beta) + \mu^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha,\beta) + \lambda\mu \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha,\beta)\right) t^2 +$$

$$+ \\ \vdots \\ +$$

$$\frac{1}{n!}\left(\lambda^n \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(\alpha,\beta) + \binom{n}{1}\lambda^{n-1}\mu \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}(\alpha,\beta) + \dots + \binom{n}{n}\mu^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n}(\alpha,\beta)\right) t^n$$

Θεωρώ την καμπύλη $V(f)$, $f(x,y)=0$ και έστω (οικογένεια ευθειών) $(\varepsilon)\ \begin{cases} x=\alpha+\lambda t \\ y=\beta+\mu t \end{cases}$ που διέρχεται από το (α,β).

Με ενδιαφέρει: Εύρεση σημείων τομής των (εάν υπάρχουν) $\begin{cases} V(f) \\ (\varepsilon) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x,y)=0 \\ x=\alpha+\lambda t \\ y=\beta+\mu t \end{cases}$

$\Longleftrightarrow f(\alpha+\lambda t, \beta+\mu t)=0$

Ορισμός: Ονομάζουμε πολλαπλότητα τομής μιας καμπύλης $V(f)$ και της ευθείας (ε) στο σημείο $P(\alpha,\beta)$ την πολλαπλότητα της ρίζας $t=0$ στο πολυώνυμο $f(\alpha+\lambda t, \beta+\mu t)$ και το συμβολίζουμε με $I_P(f,\varepsilon)$.

Δηλαδή αν $f(\alpha+\lambda t, \beta+\mu t)=t^k g(t) \overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow} I_P(f,\varepsilon)=k$

Διακρίνω περιπτώσεις :

(A) $f(a,b) \neq 0$ τότε $P(a,b) \notin V(f)$, προφανώς $I_P(f,\varepsilon) = 0$

(B) $f(a,b) = 0$ τότε

(B1) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$ ή $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$ $\Rightarrow I_P(f,(\varepsilon)) = 1$ (για όλες τις ευθείες (ε) εκτός αυτής προς ο συντελεστής του t είναι μηδέν)

Ορισμός : Αν για το $P(a,b) \in V(f)$ ισχύει $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$ ή $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$ το σημείο καλείται απλό.

Η ευθεία $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b) = 0$ είναι η εφαπτόμενη της $V(f)$ στο $P(a,b)$

Παράδειγμα

Δίνεται η $V(\underbrace{x^6 - 3x^3y + 7x^2y^2 - 5y^3}_{f})$

Το $(1,1) \in V(f)$ (καθώς $f(1,1) = 0$)

Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^5 - 9x^2y + 14xy^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 11 \neq 0$ άρα το σημείο είναι απλό

και $\frac{\partial f}{\partial y} = -3x^3 + 14x^2y - 15y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -4 \neq 0$

Άρα, η εξίσωση εφαπτομένης στο (1,1) είναι

$11(x-1) - 4(y-1) = 0$

(Β2) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$

Ορισμός: 1) Το σημείο $P(a,b)$ καλείται <u>ιδιόμορφο</u> σημείο της $V(f)$ (προφανώς $I_P(f,\varepsilon) \geq 2$)

2) Ένα σημείο $P(a,b)$ της καμπύλης $V(f)$ λέγεται σημείο καμπής <u>αν-ν</u>

i) Το P είναι απλό σημείο ($\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$ ή $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$)

και

ii) $I_P(f,(\varepsilon)) \geq 3$ ((ε) η εφαπτόμενη της $V(f)$ στο P)

<u>Παραδείγματα</u>

1) Δίνεται η $V(y-x^3)$. Να δειχθεί ότι το $(0,0)$ είναι σημείο καμπής.

<u>Λύση</u>

$f(x,y) = y - x^3$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \neq 0}_{\text{όλα τα σημεία είναι απλά.}}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$

Εξίσωση εφαπτομένης στο (0,0)

$\cancel{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) = 0$

$\Rightarrow \boxed{y=0}$
$\boxed{x=t}$

$f(x=t, y=0) = 0 - t^3 = +t^3(-1) \rightarrow I_p(f,\varepsilon) = 3$

άρα, σημείο καμπής

(προηγούμενο παράδειγμα)

2) $V(x^6 - 3x^3y + 7x^2y^2 - 5y^3)$. Να δειχθεί ότι το (1,1) είναι ~~θα εξετάσουμε το (1,1) εάν είναι διπλό ή~~ σημείο καμπής

Λύση

Είδαμε ότι $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) \neq 0$. Άρα, το (1,1) είναι απλό σημείο.

$11(x-1) - 4(y-1) = 0 \Leftrightarrow 11(x-1) = 4(y-1)$

$\Leftrightarrow \frac{11(x-1)}{11\cdot 4} = \frac{4(y-1)}{11\cdot 4}$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{11} \quad (=t)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 4t \\ y-1 = 11t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+4t \\ y = 1+11t \end{cases}$

$f(1+4t, 1+11t)$

$(1+4t)^6 - 3(1+4t)^3(1+11t) + 7(1+4t)^2(1+11t)^2 - 5(1+11t)^3 = 0 \Leftrightarrow \ldots$

αναπτύσσουμε κάνοντας πράξεις

Ορισμός: Ένα ιδιόμορφο σημείο $P(a,b) \in V(f)$ είναι πολλαπλότητος k, αν όλες οι $(k-1)$-μερικές παράγωγοι στο $P(a,b)$ είναι 0 και τουλάχιστον μία μερ. παραγ. k-τάξης $\neq 0$.

Παράδειγμα

Το $P(a,b)$ είναι ιδιόμορφο πολλ/τητας 3 $\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = 0 \qquad \left(= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \right)$$

και μια τουλάχιστον 3ης τάξης $\neq 0$.

Παρατήρηση: Για ένα ιδιόμορφο σημείο P πολλ/τητας k ισχύει
$I_P(f,\varepsilon) \geq k$

Εξισώσεις εφαπτομένων στο ιδιομ. πολλ/τητας k είναι

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,b)(x-a)^k + \binom{k}{1}\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1}\partial y}(x-a)^{k-1}(y-b) + \dots + \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(a,b)(y-b)^k = 0$$

ομογενές πολυώνυμο βαθμού k. Μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο k γραμμικών όρων (Είμαστε σε μιγαδικό επίπεδο).
Κάθε ένας από τους όρους αυτής της ανάλυσης είναι και μια εξίσωση εφαπτομένης. Άρα, πλήθος από 1 έως k.

Παράδειγμα

Να βρεθούν (εάν υπάρχουν) ιδιόμορφα σημεία και οι εφαπτόμενες σε αυτό για την καμπύλη $V(y^2-x^3-x^2)$.

Λύση

Αναζητώ ιδιόμορφα σημεία εκεί όπου

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-x^3-x^2=0 \\ -3x^2-2x=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2(x+1)=0 \quad (**) \\ -x(3x+2)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

(πρέπει να επαληθεύονται και οι 3 εξισώσεις)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ή } x=-1 \text{ απορ. λόγω } (*) \\ -x(3x+2)=0 \quad (*) \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$$

Αντίστοιχα, από $(*)$ απορρίπτεται η $x=-2/3$ λόγω $(**)$.

Επομένως, μοναδικό ιδιόμορφο το $(0,0)$.

Πολλαπλότητα ιδιομορφίας είναι 2 καθώς $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\neq 0$

(και $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$)

Άρα, εξισώσεις εφαπτομένων είναι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)(x-0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\cancel{(x-0)(y-0)} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)(y-0)^2 = 0 \Rightarrow$$

0

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 - 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^2} = -6x - 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(0,0) = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y^2}(0,0) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y^2} = 2$$

$$\Rightarrow (-6x-2)\Big|_{(0,0)} \cdot x^2 + 2\Big|_{(0,0)} \cdot y^2 = 0$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 2y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (y-x)(y+x) = 0$$

Συνεπώς, εξισώσεις εφαπτομένων στο $(0,0)$ είναι

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ \text{και} \\ y + x = 0 \end{cases}$$